**KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT**

**2. ÅRSPRØVE 2012 S-2 DM rx ret**

**SKRIFTLIG EKSAMEN I DYNAMISKE MODELLER**

**Mandag den 13. august 2012**

**Rettevejledning**

---

**Opgave 1.** Vi betragter tredjegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^3 + z^2 + 4z + 4.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 10e^{-t}.$$

(1) Vis, at $z = -1$ er rod i polynomiet $P$, og bestem de andre rødder i dette polynomium.

**Løsning.** Ved udregning af $P(-1)$ ser vi, at $z = -1$ er en rod i $P$. Dernæst benytter vi polynomiers division og finder så, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = (z + 1)(z^2 + 4),$$

hvoraf det fremgår, at $P$ også har rødderne $z = 2i$ og $z = -2i$.

(2) Bestem mængden af de $r > 0$, så alle rødderne i polynomiet $P$ ligger i mængden

$$K(r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r\}.$$

**Løsning.** Modulus af rødderne i polynomiet $P$ er 1 og 2, så den søgte mængde er $[2, \infty[$.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$, og godtgør, at $(*)$ ikke er globalt asymptotisk stabil.

**Løsning.** På basis af resultatet i spørgsmål (1) ser vi, at differentialligningen $(*)$ har den fuldstændige løsning:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t),$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

Ud fra dette resultat fremgår det, at differentialligningen $(*)$ ikke er globalt asymptotisk stabil, thi kun leddet $c_1 e^{-t}$ går mod 0 for $t$ gående mod uendelig.

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

**Løsning.** Vi ser, at vi må gætte på en løsning af formen $\hat{x} = Ate^{-t}$. Vi ser da, at

$$\hat{x}' = Ae^{-t} - Ate^{-t},\ \hat{x}'' = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} = -2Ae^{-t} + Ate^{-t},$$

og at

$$\hat{x}''' = 2Ae^{-t} + Ae^{-t} - Ate^{-t} = 3Ae^{-t} - Ate^{-t},$$

så indsættes dette i differentialligningen $(**)$, finder vi, at

$$3Ae^{-t} - Ate^{-t} - 2Ae^{-t} + Ate^{-t} + 4Ae^{-t} - 4Ate^{-t} + 4Ate^{-t} = 5Ae^{-t},$$

hvoraf det fremgår, at $A = 2$.

Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$ er derfor

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t) + 2te^{-t},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

(5) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(\&) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

**Løsning.** Det karakteristiske polynomium $Q$ svarende til differentialligningen (&) er $Q(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$, hvoraf man får, at polynomiet $Q$ har dobbeltroden $z = -1$.

Den fuldstændige løsning til differentialligningen (&) er derfor

$$y = k_1 e^{-t} + k_2 t e^{-t},$$

hvor $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

(6) Bestem de løsninger til (&), som også er løsninger til (**).

**Løsning.** Vi ser straks, at de søgte løsninger er funktionerne

$$y = k_1 e^{-t} + 2te^{-t},$$

hvor $k_1 \in \mathbf{R}$.

**Opgave 2.** Vi betragter $3 \times 3$ matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningen

$$(\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}.$$

(1) Bestem egenværdierne og de tilhørende egenrum for matricen A.

**Løsning.** Idet

$$\det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 1 & 1-t & 1 \\ 0 & 1 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)^2(1-t) - 2(2-t) =$$

$$(2-t)\Big((2-t)(1-t) - 2\Big) = (2-t)(t^2 - 3t),$$

hvoraf man finder, at matricen $A$ har egenværdierne $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$ og $\lambda_3 = 3$.

De tilhørende egenrum er

$$V(0) = N(A) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\},$$

$$V(2) = N(A - 2E) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

og

$$V(3) = N(A - 3E) = \text{span}\Big\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}.$$

(2) Bestem den fuldstændige løsning til vektordifferentialligningen (§).

**Løsning.** På baggrund at de ovenstående udregninger finder vi, at vektordifferentialligningen (§) har den fuldstændige løsning:

$$\mathbf{z} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

(3) Bestem resolventen $P(t, 0)$ (svarende til punktet $t_0 = 0$) for vektordifferentialligningen (§).

**Løsning.** Hvis vi reducerer $3 \times 6$ matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

til echelonmatrix, får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

og dermed finder vi, at resolventen $P(t, 0)$ er givet ved

$$P(t, 0) = \Big( \mathbf{p}_1(t) \;\; \mathbf{p}_2(t) \;\;\; \mathbf{p}_3(t) \Big),$$

hvor

$$\mathbf{p}_1(t) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p}_2(t) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{p}_1(t) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4) For ethvert $v \in \mathbf{R}$ betragter vi $3 \times 3$ matricen

$$B(v) = \begin{pmatrix} v & 1 & 0 \\ 1 & v & 1 \\ 0 & 1 & v \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningen

$$(\S\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = B(v)\mathbf{z}.$$

Bestem de $v \in \mathbf{R}$ for hvilke vektordifferentialligningen (§§) er globalt asymptotisk stabil.

**Løsning.** Vektordifferentialligningen (§§) er globalt asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $3 \times 3$ matricen $B(v)$ er negativ definit.

De ledende hovedunderdeterminanter for $B(v)$ er

$$D_1 = v < 0,\ D_2 = v^2 - 1 > 0 \text{ og } D_3 = (v^2 - 2)v < 0,$$

hvoraf vi får, at

$$v < 0 \wedge \big(v < -1 \vee v > 1\big) \wedge \big(v < -\sqrt{2} \vee v > \sqrt{2}\big) \Leftrightarrow v < -\sqrt{2}.$$

**Opgave 3.** For ethvert $r \in \mathbf{Q}_+$ betragter vi mængden

$$C(r) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}.$$

(1) Betragt mængden

$$M = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}_+} C(r).$$

Bestem det indre $M^o$, afslutningen $\overline{M}$ og randen $\partial(M)$ af mængden $M$.

**Løsning.** Enhver åben kugle $B\big((a_1, a_2), s\big)$, hvor $s > 0$, vil have punkter fælles med både mængden $M$ og dens komplementærmængde. Heraf får vi så, at $M^o = \emptyset, \overline{M} = \mathbf{R}^2$, og at $\partial M = \overline{M} = \mathbf{R}^2$.

(2) Betragt korrespondancen $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^2$, som er givet ved

$$F(r) = \begin{cases} C(r), & \text{for } r \in \mathbf{Q}_+ \\ \{(0,0)\}, & \text{for } r \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Q}_+ \end{cases},$$

og funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ med forskriften

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = x^2.$$

Bestem en forskrift for værdifunktionen $V : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, som er givet ved

$$\forall\, r \in \mathbf{R}_+ : V(r) = \max\{f(x,y) \mid (x,y) \in F(r)\}.$$

**Løsning.** Vi finder, at

$$V(r) = \begin{cases} r^2, & \text{for } x = \pm\, r,\ y = 0, \text{ hvor } r \in \mathbf{Q}_+ \\ 0, & \text{for } (x,y) = (0,0), \text{ hvor } r \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Q}_+ \end{cases}.$$

(3) Bestem maksimumskorrespondancen $Y^* : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^2$, som er defineret ved

$$\forall\, r \in \mathbf{R}_+ : Y^*(r) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = V(r)\}.$$

**Løsning.** Vi får, at

$$Y^*(r) = \begin{cases} \{(-r,0),(r,0)\}, & \text{for } r \in \mathbf{Q}_+ \\ \{(0,0)\}, & \text{for } r \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Q}_+ \end{cases}.$$

**Opgave 4.** Vi betragter funktionen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\,(t,x,y) \in \mathbf{R}^3 : F(t,x,y) = 2te^{t^2} + y^2,$$

og integralet

$$I(x) = \int_0^1 \left(2te^{t^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) dt.$$

(1) Vis, at for ethvert $t \in \mathbf{R}$ er funktionen $F = F(t,x,y)$ konveks som funktion af $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

**Løsning.** Vi bemærker, at

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \text{ og at } \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,$$

så funktionen $F$ har Hessematricen

$$F'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi ser, at $F''$ er positiv semidefinit, og dermed er $F$ en konveks funktion af $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, som minimerer integralet $I(x)$, når betingelserne $x^*(0) = 4$ og $x^*(1) = 5$ er opfyldt.

**Løsning.** Idet Eulers differentialligning er

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big) = -2\ddot{x} = 0,$$

får vi, at

$$\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = A \Leftrightarrow x = At + B,$$

hvor $A, B \in \mathbf{R}$.

Da $x^*(0) = 4$, får vi, at $B = 4$, og af $x^*(1) = 5$ får vi dernæst, at $A = 1$.

Den søgte funktion er da

$$x^* = x^*(t) = t + 4,$$

hvor $t \in [0, 1]$.